§14 Der nichtkommutative 2-Torus

Sei $\theta \in \mathbb{R}$ und sei $X_\theta = \{u, v\}$ mit den Relationen
$$R_\theta = \{uu^* = 1 = u^*u,\ vv^* = 1 = v^*v,\ uv = e^{2\pi i\theta} vu\}$$
Die ersten Bedingungen bedeuten, dass u, v unitär sind, und damit auch alle Produkte in u, v.
Damit sind die Bed. aus Satz 13.4 erfüllt und die universelle C^*-Algebra
$$A_\theta := C^*(X_\theta, R_\theta)$$
existiert. Wir wollen zeigen, dass mindestens eine nichttriv. Darst. von (X_θ, R_θ) existiert.
Seien dazu
$$u_\theta, v_\theta \in \mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$$
geg. durch
$$(u_\theta \xi)(n,m) = \xi(n-1,m),\quad (v_\theta \xi)(n,m) = e^{-2\pi i n\theta} \xi(n,m-1)$$
Dann gilt für alle $\xi \in \ell^2(\mathbb{Z}^2)$, $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$:
$$(u_\theta v_\theta \xi)(n,m) = (v_\theta \xi)(n-1,m) = e^{-2\pi i(n-1)\theta} \xi(n-1,m-1)$$
und
$$(v_\theta u_\theta \xi)(n,m) = e^{-2\pi i n\theta} (u_\theta \xi)(n,m-1) = e^{-2\pi i n\theta} \xi(n-1,m-1),$$
$$= e^{-2\pi i\theta} (u_\theta v_\theta \xi)(n,m),$$
also folgt $u_\theta v_\theta = e^{2\pi i\theta} v_\theta u_\theta$.
Aus der universellen Eigenschaft folgt, dass die Darst. $u \mapsto u_\theta$, $v \mapsto v_\theta$ eine $*$-Darstellung
$$\lambda_\theta : A_\theta \to C^*(u_\theta, v_\theta) \subseteq L(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$$
induziert. Wir nennen diese Darst. die <u>reguläre Darst.</u> von A_θ.

14.1 Bsp: $\theta \in \mathbb{Z}$: Ist $\theta = n \in \mathbb{Z}$, so ist $e^{2\pi i \theta} = 1$, also ist

$R_\theta = \{u, v \text{ unitär}, uv = vu = 1\} = R_0$,

d.h. $A_\theta = A_0$ ist die universelle C^*-Algebra, die von zwei kommut. unitären Elementen erzeugt wird. Dann ist $\varphi: (n,m) \to \mathcal{U}(A_0)$, $\varphi(n,m) = u^n v^m$ eine unit. Darst. von $\mathbb{Z}^2$ und induz. ein $*$-Homom. $\tilde{\varphi}: C^*(\mathbb{Z}^2) \to A_0$.
Sind umgekehrt $\{u_{(n,m)} \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ die Erz. von $C^*(\mathbb{Z}^2)$, so sind $\tilde{u} = u_{(1,0)}$, $\tilde{v} = u_{(0,1)}$ kommut. unitäre Elemente und induz. einen $*$-Homom

$$A_0 \to C^*(\mathbb{Z}^2) : u \mapsto \tilde{u} = u_{(1,0)}, v \mapsto \tilde{v} = u_{(0,1)}.$$

Man sieht sofort, dass dies invers zu $\tilde{\varphi}$ ist, also folgt $A_0 = C^*(\mathbb{Z}^2) \cong C(\mathbb{T}^2)$, d.h. A_0 ist der kommutative 2-Torus $\square$

14.2 Bez: Für $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ heißt A_θ der zu θ gehörende <u>nichtkommut.</u> 2-Torus.
(ist $\theta \notin \mathbb{Z}$, so gilt $e^{2\pi i \theta} \neq 1$, also $u_\theta v_\theta \neq v_\theta u_\theta$!)

14.3 <u>Beschreibung von A_θ</u>: Ein bel. endl. Produkt von u, u^*, v, v^* lässt sich schreiben in der Form

(*) $\quad \omega = u^{n_1} v^{k_1} \cdots u^{n_\ell} v^{k_\ell}$ mit $n_i, k_i \in \mathbb{Z}$,

und $u^0 = v^0 = 1$ (wobei $u^{-1} = u^*$, $v^{-1} = v^*$).
Die Bed. $uv = e^{2\pi i \theta} vu$ liefert per Induktion:

$$u^n v^m = e^{2\pi i \theta n m} v^m u^n$$

Durch Anwendung auf die Darst. von ω in (*)

folgt dann leicht, dass
$$\omega = \mu u^i v^j \text{ mit } i = n_1 + \dots + n_e, \; j = k_1 + \dots + k_e$$
und $\mu \in \mathbb{T}$ eine geeignete Potenz von $e^{2\pi i\theta}$.
Die dichte Unteralgebra $\mathcal{A}/\mathcal{N}$ aus d. Konstr. von $C^*(X_\theta, R_\theta)$ in 13.4. lässt sich daher schreiben als:
$$\tilde{\mathcal{A}} = \Big\{ \sum_{\mathbb{Z}^2} f(n,m)\, u^n v^m \;\Big|\; f \in C_c(\mathbb{Z}^2) \Big\} (\mathcal{N} \cap \tilde{\mathcal{A}}).$$
Sind $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{U}(B)$ mit $\tilde{u}\tilde{v} = e^{2\pi i\theta} \tilde{v}\tilde{u}$, so wird durch
$$\phi_{\tilde{u},\tilde{v}} : \tilde{\mathcal{A}} \to B \;;\; \phi_{\tilde{u},\tilde{v}}\Big(\sum f(n,m)\, u^n v^m\Big) = \sum f(n,m)\, \tilde{u}^n \tilde{v}^m$$
ein unph. $*$-Homom. auf $\tilde{\mathcal{A}}$ realisiert, und wir erhalten A_θ als Vervollst. von $\tilde{\mathcal{A}}$ durch
$$\Big\| \sum f(n,m)\, u^n v^m \Big\| = \sup_{(\tilde{u},\tilde{v})} \Big\| \sum f(n,m)\, \tilde{u}^n \tilde{v}^m \Big\|$$
<u>Nachrechnen zeigt:</u> Sind $f_1, f_2 \in C_c(\mathbb{Z}^2)$, so gilt:
$$\Big(\sum f_1(n,m)\, u^n v^m\Big)\Big(\sum f_2(n,m)\, u^n v^m\Big) = \sum f_1 *_\theta f_2(n,m)\, u^n v^m$$
<u>mit</u> $$f_1 *_\theta f_2(n,m) = \sum_{(k,l)} f_1(k,l)\, f_2(n-k, m-l)\, e^{-2\pi i\, l(n-k)\theta}$$
$$\Big[\text{da } u^k v^l u^{n-k} v^{m-l} = e^{-2\pi i\, l(n-k)} u^n v^m\Big]$$
und
$$\Big(\sum f(n,m)\, u^n v^m\Big)^* = \sum \overline{f(n,m)}\, v^{-m} u^{-n}$$
$$= \sum \overline{f(-n,-m)}\, v^m u^n = \sum \overline{f(-n,-m)}\, e^{-2\pi i nm\theta} u^n v^m.$$
Also können wir A_θ als Vervollständigung von $C_c(\mathbb{Z}^2)$ versehen mit d. Faltung $(f_1, f_2) \mapsto f_1 *_\theta f_2$ und d. Involution: $f^*(n,m) = e^{-2\pi i nm\theta}\, \overline{f(-n,-m)}$ auffassen!

14.4 Lemma Für alle $\Theta \in \mathbb{R}$ gilt $A_\Theta \cong A_{-\Theta} = A_{n-\Theta}$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bew: $A_{-\Theta} = A_{n-\Theta}$ ist klar, da $e^{2\pi i(-\Theta)} = e^{2\pi i(n-\Theta)}$.
Seien nun u^+, v^+ die univ. Erzeuger von A_Θ und u^-, v^- die univ. Erzeuger von $A_{-\Theta}$.
Dann gilt
$u^+ v^+ = e^{2\pi i\Theta} v^+ u^+$, also $v^+ u^+ = e^{-2\pi i\Theta} u^+ v^+$
Wegen der univ. Eigenschaft von $A_{-\Theta}$ ex. dann ein $*$-Homom.
$$\phi : A_{-\Theta} \to A_\Theta \,,\ u^- \mapsto v^+ \,,\ v^- \mapsto u^+$$
und analog $\psi : A_\Theta \to A_{-\Theta}$; $u^+ \mapsto v^-, v^+ \mapsto u^-$.
Damit ist ψ invers zu ϕ und ϕ ist $*$-Iso. ∎

Wegen $A_\Theta = A_{1-\Theta}$ genügt es daher nur $\Theta \in [0, \frac{1}{2}]$ zu betrachten (bis auf Isomorphie)

14.5 Bemerkung: Ähnlich wie für $C^*(\mathbb{Z}^2)$ rechnet man leicht nach, dass
$$\lambda_\Theta : A_\Theta \to C^*(u_\Theta, v_\Theta) \subseteq L(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$$
auf der dichten Unteralgebra $C_c(\mathbb{Z}^2)$ injektiv ist. Damit folgt, dass $\dim(A_\Theta) = \infty$ gilt.

Ist $\Theta = \frac{p}{q}$ rational mit $\mathrm{ggT}(p,q) = 1$, so können wir aber eine Familie von endl. dim $*$-Darst.
$$\pi_{(z,w)} : A_\Theta \to M_q(\mathbb{C}) \quad , \ (z,w) \in \mathbb{T}^2$$
konstruieren. Sei dazu $\lambda := e^{2\pi i\Theta}$ und seien
$$V = \mathrm{diag}(1, \lambda, \dots, \lambda^{n-1}) \quad , \ U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dann sind $U, V \in M_q(\mathbb{C})$ unitär mit

$$VU = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \lambda & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ & & & & \lambda^{q-2} \\ \lambda^{q-1} & & & & 0 \end{pmatrix} \quad UV = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda^{q-1} \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda VU$$

da $\lambda^q = e^{2\pi i \theta q} = e^{2\pi i p} = 1$ mit $\theta = \frac{p}{q}$.

Also ex. genau ein $*$-Homom.

$$\pi_{(1,1)} : A_\theta \to M_q(\mathbb{C}) \; ; \; \pi_{(1,1)}(u) = U, \; \pi_{(1,1)}(v) = V.$$

Mit etwas Arbeit rechnet man nach, dass jede Matrix $T \in M_q(\mathbb{C})$ die mit U und V vertauscht bereits ein Vielfaches der Einsmatrix ist. Nach Schur ist daher $\pi_{(1,1)}$ irreduzibel.

Ist nun $(z, \omega) \in \mathbb{T}^2$, so gilt auch

$$(zU)(\omega V) = e^{2\pi i \theta} (\omega V)(zU)$$

und damit ex. genau eine (irreduzible!) $*$-Darst.

$$\pi_{(z,\omega)} : A_\theta \to M_q(\mathbb{C}) \; ; \; \pi_{(z,\omega)}(u) = zU, \; \pi_{(z,\omega)}(v) = \omega V.$$

<u>Man kann dann zeigen:</u>

(1) $\pi_{(z,\omega)} \simeq \pi_{(z',\omega')} \iff \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2$ mit $(z,\omega) = (\mu^k, \mu^l)(z', \omega')$ $\quad (*)$

mit $\mu = e^{2\pi i \frac{1}{q}}$.

(2) Jede irred. Darst. von $A_{\frac{p}{q}}$ ist äquivalent zu einer Darst. $\pi_{(z,\omega)}$, $(z,\omega) \in \mathbb{T}^2$.

Damit folgt $\widehat{A_{\frac{p}{q}}} \simeq \mathbb{T}^2/_\sim$ mit $\sim$ wie in $(*)$

(Es gilt $\mathbb{T}^2/_\sim \simeq \mathbb{T}^2$ vermöge $[z,\omega] \mapsto (z^q, \omega^q)$!)

Insbesondere besitzt $A_{\frac{p}{q}}$ unendlich viele verschiedene Ideale $\not{\text{}}$ ■

Wir wollen nun den Fall $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ anschauen. Wir werden sehen, dass die Struktur von A_θ in diesem Fall total verschieden zum rationalen Fall ist:

<u>14.6 Lemma</u> Sei $\theta \in \mathbb{R}$. Dann ex. zu jedem Paar $(z,\omega) \in \mathbb{T}^2$ genau ein $*$-Autom.

$$\beta_{(z,\omega)} : A_\theta \to A_\theta \quad \text{mit } \beta_{(z,\omega)}(u) = zu,\ \beta_{(z,\omega)}(v) = \omega v$$

Die Abb. $\beta : \mathbb{T}^2 \to \operatorname{Aut}(A_\theta)$, $(z,\omega) \mapsto \beta_{(z,\omega)}$ ist ein <u>stark stetiger</u> Homomorphismus

[stark stetig: $\forall a \in A_\theta$ ist die Abb.
$$\mathbb{T}^2 \to A_\theta;\ (z,\omega) \mapsto \beta_{(z,\omega)}(a) \text{ stetig}].$$

<u>Beweis</u>: Wegen

$$(zu)(\omega v) = z\omega(uv) = z\omega(e^{2\pi i\theta} vu) = e^{2\pi i \theta}(\omega v)(zu)$$

erfüllt das Paar $(zu, \omega v)$ die erzeugenden Relationen von A_θ. Wegen der univ. Eigenschaft ex. daher genau ein $*$-Homom.

$$\beta_{(z,\omega)} : A_\theta \to A_\theta \text{ mit } \beta_{(z,\omega)}(u) = zu,\ \beta_{(z,\omega)}(v) = \omega v.$$

Es ist dann klar, dass

$$\beta_{(z,\omega)} \circ \beta_{(z',\omega')} = \beta_{(zz',\omega\omega')}$$

und damit $\beta_{(\bar z,\bar\omega)} \circ \beta_{(z,\omega)} = \beta_{(1,1)} = \mathrm{id}_{A_\theta}$,

also $\beta_{(\bar z,\bar \omega)} = \beta_{(z,\omega)}^{-1}$. Also ist $\beta_{(z,\omega)}$ ein $*$-Autom. und $(z,\omega) \to \beta_{(z,\omega)}$ ist ein Homomorphismus.

Sei nun $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$. Dann gilt für $(z_k,\omega_k) \to (z,\omega)$ in $\mathbb{T}^2$:

$$\beta_{(z_k,\omega_k)}\Big(\sum f(n,m)\, u^n \omega^m\Big) = \sum f(n,m)\, z_k^n \omega_k^m\, u^n \omega^m$$

$$\xrightarrow{\text{endl. Summe}} \sum f(n,m)\, z^n \omega^m\, u^n \omega^m = \beta_{(z,\omega)}\Big(\sum f(n,m)\, u^n \omega^m\Big)$$

Ist dann $a \in A_\Theta$ beliebig und $\varepsilon > 0$, so wähle $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$ mit $\|a - \underbrace{\sum f(n,m)\, u^n v^m}_{=:x}\| < \frac{\varepsilon}{3}$ und ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\|\beta_{(z_k,\omega_k)}(x) - \beta_{(z,\omega)}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall k \geq k_0$.

Dann folgt für $k \geq k_0$:

$$\|\beta_{(z_k,\omega_k)}(a) - \beta_{(z,\omega)}(a)\| \leq \overbrace{\|\beta_{(z_k,\omega_k)}(a-x)\|}^{<\frac{\varepsilon}{3}}$$

$$+ \underbrace{\|\beta_{(z_k,\omega_k)}(x) - \beta_{(z,\omega)}(x)\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|\beta_{(z,\omega)}(a-x)\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon.$$

<u>14.7 Bezeichnung</u>: Sei A eine unitale C^*-Algebra und sei $u \in A$ unitär. Dann ist
$$\mathrm{Ad}\,u : A \to A;\ \mathrm{Ad}\,u(a) = u a u^{-1}$$
ein $*$-Autom. von A. Automorphismen der Form $\mathrm{Ad}\,u$ heißen <u>innere</u> Automorphismen.

<u>14.8</u> Lemma Sei $\Theta \in \mathbb{R}$ fest und sei $\lambda := e^{2\pi i \Theta}$. Dann gilt
$$\beta_{(\lambda^n,\lambda^m)} = \mathrm{Ad}(v^{-n} u^m) \quad \forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2.$$

Insb. ist $\beta_{(\lambda^n,\lambda^m)}$ ein innerer Autom. $\forall (n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

Bew: Da $A_\Theta = C^*(u,v)$ genügt es zu zeigen, dass
$$\beta_{(\lambda^n,\lambda^m)}(a) = (v^{-n} u^m)\, a\, (v^{-n} u^m)^* \quad \text{für } a = u, v.$$

<u>$a = u$:</u> $(v^{-n} u^m)\, u\, (v^{-n} u^m)^* = v^{-n} \cancel{u^m}\, u\, \cancel{u^{-m}}\, v^n$
$= e^{2\pi i n \Theta}\, u\, \cancel{v^{-n} v^n} = \lambda^n u$, und

$\underline{a = v}$: $(v^{-n}u^m)v(v^{-n}u^m)^* = v^{-n}u^m v u^{-m} v^n$
$= e^{2\pi i m\theta}\, v^{-n} v u^m u^{-m} v^n = \lambda^m v.$ ∎

14.9 Satz Sei $H \subseteq \mathbb{R}$ eine abg. Untergruppe von $(\mathbb{R},+)$. Dann $H = \{0\}$, $H = \mathbb{R}$ oder $H = a\mathbb{Z}$ für ein $0 < a \in \mathbb{R}$.

Bew: Sei $H \neq \{0\}$, und sei $a := \inf\{x \in H \mid x > 0\}$.

Beh: Ist $a = 0$, so gilt $H = \mathbb{R}$.
Sei dazu $x \in \mathbb{R}$ bel. Sei $c_x := \sup\{b \in H \mid b < x\}$.
Dann ist $c_x \in H$, da H abg. in $\mathbb{R}$.
Ann: $c_x < x$. Dann ist $x - c_x > 0$ und $x - c_x \in H$.
Dann ex. ein $b \in H$ mit $0 < b < x - c_x$, und dann folgt $b + c_x \in H$ mit $c_x < b + c_x < x$.
Widerspruch zur Def. von c_x !
Es folgt $x = c_x \in H$ für alle $x \in \mathbb{R}$!

Sei nun $a > 0$: Da $a \in H$ gilt $a\mathbb{Z} \subseteq H$.
Ann: $\exists\, b \in H$ mit $b \notin a\mathbb{Z}$. Dann ex. ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $an < b < a(n+1)$, also
$$0 < b - an < a \quad \text{mit } b - an \in H.$$
Wid. zur Def von a ! ∎

14.10 Folgerung: Sei $\theta \in \mathbb{R}$ irrational, $\lambda = e^{2\pi i\theta}$.
Dann gelten: (1) $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$ ist dichte Untergr. von $\mathbb{R}$.
(2) $\{\lambda^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ ist dichte Untergruppe von $\mathbb{T}$!
(3) $\{(\lambda^n, \lambda^m) \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\}$ ist dichte Untergruppe von $\mathbb{T}^2$.

Bew: (1) $\overline{\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}}$ ist eine abg. Untergr. von $\mathbb{R}$.
Ann: $\exists\, a > 0$ mit $\overline{\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}} = a\mathbb{Z}$. Dann ex. $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $an = 1$, $am = \theta$, also $a = \frac{1}{n} = \frac{\theta}{m}$ und $\theta = \frac{m}{n}$.
Also $\theta \in \mathbb{Q}$. Wid!

(2) Bem: $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{T}$; $\varphi(t) = e^{2\pi i t}$. Dann ist $\varphi(\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}) = \{e^{2\pi i \theta n} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ dicht in $\mathbb{T}$, da $\mathbb{Z}+\theta\mathbb{Z}$ dicht in $\mathbb{R}$ und φ stetig und surjektiv.

(3) Ist D dicht in X, so ist $D \times D$ dicht in $X \times X$. Damit folgt (3) aus (2). ∎

14.11 Bem+Def: Nach Gelfand-Naimark existiert eine treue Darst. $A_\theta \subseteq B(H)$ für einen geeigneten HR H. Dann ist für alle $a \in A_\theta$ $(z,w) \to \beta_{(z,w)}(a)$ eine stetige operatorwertige Fkt. auf $\mathbb{T}^2$ und wir können das Integral

$$E_\theta(a) := \int_{\mathbb{T}^2} \beta_{(z,w)}(a)\, d(z,w)$$

$$= \int_{[0,1]^2} \beta_{(e^{2\pi i s}, e^{2\pi i t})}(a)\, d(s,t)$$

berechnen. $E_\theta(a)$ ist der eindeutig bestimmte Operator in $B(H)$ mit

$$\langle E_\theta(a)\xi, \zeta\rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \langle \beta_{(z,w)}(a)\xi, \zeta\rangle\, d(z,w)$$

für alle $\xi, \zeta \in H$. Approximation des Integrals durch Riemannsche Summen zeigt dann, dass $E_\theta(a) \in A_\theta$ $\forall a \in A_\theta$ gilt.

14.12 Satz Sei $E_\theta: A_\theta \to A_\theta$ wie oben. Dann ex. genau ein Zustand $\tau_\theta: A_\theta \to A_\theta$ mit:

(1) $E_\theta(a) = \tau_\theta(a) \cdot 1$ $\quad \forall a \in A$.

(2) $\tau_\theta(ab) = \tau_\theta(ba)$ $\quad \forall a,b \in A_\theta$ (dh. τ_θ ist Spur)

(3) $\tau_\theta(a^*a) > 0$ für alle $0 \neq a \in A_\theta$

(d.h. $\tau_\theta: A_\theta \to \mathbb{C}$ ist eine treue Spur).

<u>Ferner gilt</u>: Ist $a = \sum f(n,m) u^n v^m$ mit $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$, so gilt $\tau_\Theta(a) = f(0,0)$.

<u>Bemerkung</u>: Der Zusatz besagt: Ist $\Theta = 0$, also $A_0 = C^*(\mathbb{Z}^2) \simeq C(\mathbb{T}^2)$, so korrespondiert τ_0 bzgl. dieses Isom. zum Lebesgue-Integral auf $\mathbb{T}^2$. (vergl. 13-13). Damit kann τ_Θ als Analogon des Lebesgue-Integrals auf dem nichtkommutativen 2-Torus A_Θ aufgefasst werden!

<u>Bew. von 16.22</u>: Für $a = u^n v^m$ gilt:

$$E_\Theta(u^n v^m) = \int_{\mathbb{T}^2} \beta_{(z,w)}(u^n v^m)\, d(z,w) = \int_{\mathbb{T}^2} z^n w^m u^n v^m\, d(z,w)$$

$$= \left(\int_{\mathbb{T}^2} z^n w^m \, d(z,w)\right) u^n v^m = \begin{cases} 0, & \text{falls } (n,m) \neq (0,0) \\ 1, & \text{falls } (n,m) = (0,0) \end{cases}.$$

Damit folgt für alle $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$:

$$(*) \quad E_\Theta\left(\sum f(n,m) u^n v^m\right) = \sum f(n,m) E_\Theta(u^n v^m) = f(0,0)\cdot 1$$

Da die Abb. $A_\Theta \to C(\mathbb{T}^2, A_\Theta)$; $a \mapsto ((z,w) \mapsto \beta_{(z,w)}(a))$ stetig bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ auf $C(\mathbb{T}^2, A_\Theta)$ ist und da

$$\left\| \int_{\mathbb{T}^2} \varphi(z,w)\, d(z,w) \right\| \leq \|\varphi\|_\infty \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{T}^2, A_\Theta),$$

ist $E_\Theta : A_\Theta \to A_\Theta$ stetig. Da $C_c(\mathbb{Z}^2)$ dicht in A_Θ und $\mathbb{C}\cdot 1$ abg. in A_Θ folgt dann, dass

$$E_\Theta(A_\Theta) \subseteq \mathbb{C}\,1 \subseteq A_\Theta.$$

<u>Damit</u>: $\forall a \in A_\Theta$ ex. ein $\tau_\Theta(a) \in \mathbb{C}$ mit $E_\Theta(a) = \tau_\Theta(a) 1$, und da E_Θ linear, ist auch τ_Θ linear.

Ist $a = \sum f(n,m) u^n v^m$, so besagt $(*)$, dass $\tau_\Theta(a) = f(0,0)$

Da E_Θ stetig, ist auch τ_Θ stetig!

Zeige: $\tau_\Theta : A_\Theta \to \mathbb{C}$ ist positive Fkt. mit $\tau_\Theta(1) = 1$ und $\tau_\Theta(ab) = \tau_\Theta(ba)$ $\forall a, b \in A_\Theta$.

Da τ_Θ stetig, genügt es diese Aussagen für Elemente d. Form $a = \sum f(n,m) u^n v^m$, $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$ zu zeigen: Es gilt dann mit 14.3:

$$a^* a = \sum_{(n,m)} (f^* *_\Theta f)(n,m) u^n v^m$$

mit $f^*(n,m) \overset{(14.3)}{=} e^{-2\pi i \Theta m n} \overline{f(-n,-m)}$ und

$$(f^* *_\Theta f)(n,m) \overset{(14.3)}{=} \sum_{(k,l)} f^*(k,l) f(n-k, m-l) e^{2\pi i \Theta k(m-l)}$$

$$= \sum_{(k,l)} \overline{f(-k,-l)} f(n-k, m-l) \underbrace{e^{-2\pi i \Theta k l} e^{2\pi i k(m-l)}}_{= e^{2\pi i \Theta k m}}$$

Also: $\tau_\Theta(a^* a) = f^* *_\Theta f(0,0) = \sum_{(k,l)} \overline{f(-k,-l)} f(-k,-l)$

$$= \sum_{(k,l)} |f(k,l)|^2 > 0, \text{ falls } f \neq 0.$$

Also ist τ_Θ positiv und wegen $\tau_\Theta(1) = \tau_\Theta(\delta_{(0,0)} u^0 v^0) = 1$ ist τ_Θ Zustand.

Ferner gilt für alle $f_1, f_2 \in C_c(\mathbb{Z}^2)$, $a = \sum f_1(n,m) u^n v^m$, $b = \sum f_2(n,m) u^n v^m$:

$\tau_\Theta(ab) = f_1 *_\Theta f_2(0,0)$ und $\tau_\Theta(ba) = f_2 *_\Theta f_1(0,0)$.

Nun gilt $f_1 *_\Theta f_2(0,0) = \sum_{(k,l)} f_1(k,l) f_2(-k,-l) e^{-2\pi i \Theta k l}$

$$\overset{(k,l) \mapsto (-k,-l)}{=} \sum_{(k,l)} f_2(k,l) f_1(-k,-l) e^{-2\pi i \Theta k l} = f_2 *_\Theta f_1(0,0),$$

also folgt $\tau_\Theta(ab) = \tau_\Theta(ba)$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\tau_\theta(a^*a) > 0$ für alle $0 \neq a \in A_\theta$ (bisher wissen wir dies nur für Elemente der Form $a = \sum f(n,m) u^m v^n$, $f \in C_c(\mathbb{Z}^2)$).

Sei dazu $0 \neq a \in A_\theta$ und sei $\varphi: A_\theta \to \mathbb{C}$ ein Zustand mit $\varphi(a^*a) = \|a^*a\| > 0$. Dann folgt:

$$\varphi(E_\theta(a^*a)) = \varphi\Big(\int_{\mathbb{T}^2} \beta_{(z,w)}(a^*a)\, d(z,w)\Big)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ stetig} \\ + \text{Riemann-} \\ \text{Summen}}}{=} \int_{\mathbb{T}^2} \underbrace{\varphi(\beta_{(z,w)}(a^*a))}_{\geq 0}\, d(z,w) > 0,$$

da $\varphi(\beta_{(1,1)}(a^*a)) = \varphi(a^*a) > 0$.

Damit folgt $0 \neq E_\theta(a^*a) = \tau_\theta(a^*a)\underline{1}$, also $\tau_\theta(a^*a) > 0$ (da wir schon wissen, dass $\tau_\theta(a^*a) \geq 0$). ■

<u>14.13</u> <u>Satz</u> Sei $\theta \in \mathbb{R}$ <u>irrational</u>. Dann ist $\tau_\theta: A_\theta \to \mathbb{C}$ der <u>einzige</u> <u>Spurzustand</u> auf A_θ, dh. ist $\tau: A_\theta \to \mathbb{C}$ ein bel. Zustand mit $\tau(ab) = \tau(ba)$ $\forall a,b \in A_\theta$, so gilt $\tau = \tau_\theta$.

<u>Bew:</u> Sei $\lambda := e^{2\pi i \theta}$ und sei $H_\theta = \{(\lambda^n, \lambda^m) \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\} \subseteq \mathbb{T}^2$. Nach 14.10 ist H_θ dicht in $\mathbb{T}^2$.

Für alle $(\lambda^n, \lambda^m) \in H_\theta$ gilt mit 14.8:

$$\tau(\beta_{(\lambda^n,\lambda^m)}(a)) = \tau(\underbrace{(v^{-n}u^m)a}_{b}\underbrace{(v^{-n}u^m)^*}_{c}) = \tau(bc)$$

$$= \tau(cb) = \tau(a).$$

Da H_θ dicht in $\mathbb{T}^2$ und die $(z,w) \mapsto \beta_{(z,w)}(a)$ und τ stetig sind, folgt $\tau(\beta_{(z,w)}(a)) = \tau(a)$ für alle $(z,w) \in \mathbb{T}^2$. Damit folgt:

$$\tau(a) = \int_{\mathbb{T}^2} \tau(a)\, d(z,w) = \int_{\mathbb{T}^2} \tau(\beta_{(z,w)}(a))\, d(z,w)$$

$$= \tau\Big(\int_{\mathbb{T}^2} \beta_{(z,w)}(a)\, d(z,w)\Big) = \tau(E_\theta(a))$$

$$= \tau(\tau_\theta(a)\cdot 1) = \tau_\theta(a)\underbrace{\tau(1)}_{=1} = \tau_\theta(a). \quad \blacksquare$$

Wir zeigen nun, dass für irrationale $\theta \in \mathbb{R}$ die Algebra A_θ einfach ist, d.h. $\{0\}$ und A_θ sind die einzigen abg. Ideale in A_θ.

Ist $\theta = \frac{p}{q}$ rational, so hatten wir in 14.5 gesehen, dass A_θ unendl. viele verschiedene Ideale (alle mit endl. Kodimension) besitzt! Die Strukturen von A_θ im rationalen und irrationalen Fall unterscheiden sich daher ganz erheblich!

14.14 Satz Sei $\theta \in \mathbb{R}$ irrational. Dann ist A_θ einfach, d.h. $\{0\}$ und A_θ sind die einzigen abg. Ideal in A_θ.

Bew: Sei $\{0\} \neq I \subseteq A_\theta$ ein abg. Ideal in A_θ und sei $0 \neq a \in I$. Sei $H_\theta = \{(\lambda^n, \lambda^m) \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\} \subseteq \mathbb{T}^2$ mit $\lambda = e^{2\pi i \theta}$. Dann gilt mit 14.08:

$$\beta_{(\lambda^n,\lambda^m)}(a) = v^{-n} u^m a (v^{-n} u^m)^* \in I,$$

und da $I \subseteq A_\theta$ abg. und H_θ dicht in $\mathbb{T}^2$ folgt auch $\beta_{(z,w)}(a) \in I$ für alle $(z,w) \in \mathbb{T}^2$. Angewendet auf $a = b^*b$ für $0 \neq b \in I$ folgt:

$$\tau_\theta(b^*b)1 = E_\theta(b^*b) = \int_{\mathbb{T}^2} \underbrace{\beta_{(z,w)}(b^*b)}_{\in I}\, d(z,w) \in I$$

für alle $b \in I$. Da $\tau_\theta(b^*b) > 0$ für $b \neq 0$ folgt $1 \in I$. $\blacksquare$

$\Rightarrow$ Also $I = A_\theta$.

14.15 Folgerung: Sei B eine beliebige unitale C^*-Algebra und seien $u', v' \in \mathcal{U}(B)$ mit

$$u'v' = e^{2\pi i\theta} v'u'.$$

Dann gilt $A_\theta \cong C^*(u',v') \subseteq B$

via $\phi: A_\theta \to C^*(u',v')$; $\phi(u) = u'$, $\phi(v) = v'$.

Beweis: Aus der universellen Eigenschaft von A_θ folgt, dass $\phi: A_\theta \to C^*(u',v') \subseteq B$ existiert, und es ist klar, dass ϕ surjektiv ist. Aus 14.14 folgt, dass $\operatorname{Ker}\phi = \{0\}$, also ist ϕ auch injektiv, also isometrisch. ∎

14.16 Folgerung: Sei $\lambda_\theta: A_\theta \to L(\ell^2(\mathbb{Z}^2))$ die reguläre Darst. von A_θ (siehe Konstr. von A_θ). Dann ist λ_θ isometrisch.

Bew. Das folgt sofort aus 14.15. ∎

Bemerkung: Wir wissen: $A_\theta = A_{1-\theta}$ für $\theta \in [0,1)$ und $A_{\theta+n} = A_\theta$ $\forall n \in \mathbb{Z}$, also jedes A_θ ist isom. zu $A_{\theta'}$ für ein $\theta' \in [0,\frac{1}{2}]$ (siehe 14.4).

Problem: Wann gilt $A_\theta \cong A_{\theta'}$ wenn $\theta, \theta' \in [0,\frac{1}{2}]$.

Wissen schon: Wenn θ rational, θ' irrational, so folgt $A_\theta \not\cong A_{\theta'}$. Mit Hilfe der K-Theorie kann man tatsächlich zeigen:
für $\theta, \theta' \in [0,\frac{1}{2}]$ gilt: $A_\theta \cong A_{\theta'} \iff \theta = \theta'$. ?